Alessandro Zampa – Franco Rupeni

IL PECCATO DI EUCLIDE

Alla ricerca della Geometria Preassoluta

Scienza e tecnica

BOOK SPRINT EDIZIONI

www.booksprintedizioni.it

“A Clelia e Giada,
originali ispiratrici.”

Alessandro

“Ad Angela.”

Franco

L’ANTEFATTO

Ormai quasi non riusciva più a ricordare il momento preciso in cui aveva deciso di imbarcarsi in quell’impresa titanica, tanto tempo era passato, ma non gliene importava molto: gli bastava essere riuscito finalmente a mettere un punto. Già da studente era rimasto colpito da quanto la conoscenza matematica dell’epoca fosse ben lontana dal paradigma scientifico di Aristotele. Il filosofo aveva messo bene in evidenza come fosse necessario individuare dei princìpi primi ai quali ogni dimostrazione dovesse soggiacere, come la validità di un’affermazione non potesse discendere da sé attraverso una catena circolare di deduzioni. Con l’affinarsi dell’esperienza, quella che in gioventù era stata una semplice perplessità finì così per tramutarsi in un chiodo fisso, che lo condusse alla stesura degli *Elementi*, con l’obiettivo di colmare l’evidente lacuna. Per riuscire nell’immane impresa di dare un fondamento a tutta la matematica, aveva individuato una strategia: da un lato analizzava minuziosamente quanto già noto alla ricerca delle basi epistemologiche, dall’altro usava quegli stessi risultati che aveva posto sotto esame per dedurne di nuovi e addentrarsi più in profondità nel dominio dei suoi studi. Se in principio questa scelta si rivelò fruttuosa, alla lunga i nodi non poterono non venire al pettine: tutta l’impalcatura sarebbe crollata se la ricerca dei princìpi non fosse giunta a conclusione. E proprio qui si celava la sua *Nemesi*.

Il continuo lavoro di cesello lo aveva portato a suddividere il materiale nei numerosi volumi, ciascuno dei quali conteneva i pochi princìpi specifici di quell’ambito, mentre al primo libro aveva affidato quelli che avrebbero costituito la base comune a tutti, seguendo la prassi che voleva i trattati svilupparsi sempre in avanti, senza mai ritornare sui passi percorsi. Ebbene, arrivato quasi alla fine, si accinse a mettere mano all’unico aspetto che non aveva ancora approfondito a sufficienza: la spinosa questione delle parallele, che aveva generato interminabili discussioni in seno all’Accademia platonica. Grazie ai suoi primi postulati era riuscito a dimostrare l’esistenza delle parallele, ma non a darne una caratterizzazione definitiva, la quale sembrava proprio non essere alla sua portata e minacciava di rendere un’inutile incompiuta l’opera di anni di fatiche. Era stato troppo presuntuoso? La verità era che si trovava in affanno. Più il tempo passava e più cominciava a insinuarsi un infido senso di sfiducia che minava le sue certezze, che rendeva sempre più penoso scegliere se continuare a coltivare la speranza o prendere atto del fallimento. Le interminabili passeggiate lungo la spiaggia di Alessandria diventavano sempre più opprimenti. Avevano il duplice scopo di traviare la mente da nefasti pensieri e di propiziare la scoperta del nesso mancante, della chiave di volta. Un giorno gli parve perfino di avere trovato la tanto agognata risposta: si era fermato a riposare le membra da una stanchezza più morale che fisica e, rilassato dal ritmico frangersi delle onde, aveva lasciato vagare senza meta lo sguardo, perso nell’orizzonte, fino a che un ghiribizzo non lo fece sobbalzare. Era un dettaglio nel volo di un paio di gabbiani, notato chissà quante volte ma mai interpretato nel modo bizzarro che gli si era palesato in quel momento. I due gabbiani si stavano dirigendo al largo, affiancati, verso una nave di pescatori alla ricerca di cibo. Man mano che si allontanavano, le loro dimensioni apparenti e la loro distanza divenivano sempre più piccole e pareva che fossero destinati a scontrarsi. Immaginando che il loro tragitto fosse rettilineo, pensò, il volo avrebbe potuto essere paragonato al prolungamento di due *rette* parallele: entrambi i percorsi formavano ovviamente angoli retti rispetto a qualunque piano perpendicolare a uno dei due, mentre nel caso che i due gabbiani si stessero accostando uno dei due angoli sarebbe stato acuto. Se dunque, si disse, già due tratti paralleli danno l’impressione di incontrarsi, sicuramente lo faranno due che, anche solo impercettibilmente, stessero avvicinandosi l’uno all’altro. L’improvvisa ispirazione lo fece scattare. Corse immediatamente al suo studio per dimostrare la proprietà

che i due inconsapevoli pennuti gli avevano suggerito, forte dei postulati che già gli avevano permesso di certificare la validità dei numerosi risultati documentati nel suo nascente trattato. Il destino, però, si rivelò nuovamente beffardo e tutti i tentativi intrapresi caddero nel vuoto: non riusciva a incastrare quest'ultimo tassello nel meraviglioso *puzzle* che stava componendo. Eppure doveva essere così, lo aveva visto coi suoi occhi! Intanto il tempo passava e l'ossessione di trovare una risposta lo stava segregando in un'opprimente prigione, allontanandolo dall'affetto dei suoi cari. Cosa poteva fare?
A un passo dal traguardo si era imbattuto nel paradosso della sua vita. Era stato in grado di ricondurre tutta la matematica a pochi princìpi riguardanti la retta e il cerchio, le forme che Platone aveva elevato a campioni della bellezza geometrica, ed era anche riuscito a rispettare il precetto di Aristotele che imponeva di basare la conoscenza su premesse immediate, la cui validità fosse intuitivamente evidente, formulate mediante enunciati semplici e chiari. Ma un ultimo insormontabile ostacolo si frapponeva al suo successo. Piano piano, spossato dall'esasperante impossibilità di compiere quell'ultimo passo, cominciò a palesarsi la prospettiva di gettare la spugna, così, provato allo stremo da tutti quei vani tentativi e convinto della futilità di ogni sforzo ulteriore, si risolse a imboccare l'unica via di fuga rimasta: elevare quella fatidica proprietà a principio primo, contravvenendo all'aristotelico dettame. L'arroganza che l'aveva mosso a tentare l'impresa sarebbe però stata punita: la macchia che testimoniava l'onta sarebbe per sempre rimasta impressa nella sua opera. Ma almeno era finita!

* * *

Di Euclide, il famoso matematico protagonista di questo breve racconto di fantasia, si conoscono solo due aneddoti e alcune delle opere, che sono riuscite a sfuggire all'oblio del tempo. Tra queste, gli *Elementi* sono diventati il punto di riferimento per la matematica fino a non molto tempo fa (ancora oggi se ne insegnano i principi in forma moderna) e, in virtù dell'alto standard qualitativo per quei tempi, hanno segnato la rovina di tutti i trattati precedenti, al punto che non ce n'è pervenuto alcuno. Nondimeno, proprio perché divenuta il centro focale, il fondamento del pensiero matematico, l'opera di Euclide non ha mancato di attirare a sé le censure dei numerosi commentatori successivi. Sono state mosse due tipologie di critiche. La prima riguarda la presenza di vere e proprie assunzioni implicite, non espresse, ma ugualmente utilizzate dal matematico per dimostrare alcune delle sue proposizioni. Già Zenone di Sidone, ad esempio, a cavallo tra il II e il I secolo a.C., aveva mostrato come perfino la proposizione iniziale del primo libro poggi su una di queste, ma numerose altre furono rinvenute dal minuzioso esame degli studiosi. Si trattava, in buona sostanza, della mancanza di completezza del sistema dei princìpi primi euclidei, una pecca di secondaria importanza, tutto sommato, perché sarebbe bastato aggiungere quelli tralasciati per perfezionare l'opera. Infatti, nonostante uno degli obiettivi primari del trattato fosse proprio quello di dedurre la conoscenza matematica a partire da poche premesse autoevidenti, non si poteva fare una colpa ad Euclide se i tempi non erano ancora sufficientemente maturi per consentire al matematico di individuare tutte le assunzioni necessarie a convalidare i suoi teoremi. Basti pensare che solo nel secolo scorso si è giunti ad una sistemazione assiomatica e ad un'analisi adeguata di ciò che questa richiede dal punto di vista logico: ben più di 2000 anni dopo la stesura degli *Elementi*!
La critica più feroce, che non tardò a farsi sentire, riguardava, invece, una questione metodologica e il suo bersaglio era proprio il postulato che Euclide aveva utilizzato allo scopo di caratterizzare (per contrapposizione) le parallele: i commentatori negavano l'evidenza intuitiva della sua validità, non verificabile mediante la riga e il compasso, e ritenevano che fosse dimostrabile per mezzo degli altri postulati. In ciò erano in qualche modo spinti sia dalla complessità del suo enunciato, in netto contrasto con la cristallina semplicità degli altri, sia

dalla sua forma ipotetica. Venne così a costituirsi una vera e propria caccia alla dimostrazione, che terminò solamente nell'Ottocento, quando l'avvento della geometria iperbolica, scoperta da Bolyai e Lobačevskij, alla fine annientò le ultime resistenze. Posidonio nel I secolo a.C. fu tra i primi a proporne una dimostrazione. Ci riuscì grazie ad una modifica della nozione di parallele: non più rette che non si intersecano, ma rette che mantengono sempre la stessa distanza tra loro, come i gabbiani del racconto. Ci si accorse subito, però, che anche questa prova poggiava su un'assunzione implicita: il fatto che l'insieme dei punti di un semipiano generato da una retta che sono equidistanti dalla retta stessa sia, a sua volta, una retta. Questa assunzione si rivelò dunque essere un principio primo *equivalente* al postulato euclideo e non fece altro che spostare il problema dalla dimostrazione di questo a quella dell'altro. Così, di enunciato in enunciato, tutti equivalenti al principio di Euclide, una schiera di matematici (tra i quali Gemino (I sec. a.C.), Tolomeo (II sec. d.C.), Proclo (V sec. d.C.), il persiano Nasr-ed-din (1201-1274), gli italiani Pietro Cataldi (1552-1626) e Giordano Vitale (1633-1711), l'inglese John Wallis (1616-1703), il tedesco Johann Heinrich Lambert (1728-1777), il francese Adrien-Marie Legendre (1752-1833), l'italiano Louis Lagrange (1736-1813) …), accecati dal pregiudizio della sua dimostrabilità, tentarono vanamente di venirne a capo. Uno dei punti di svolta nella storia della questione delle parallele è costituito dagli sforzi del logico italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), fra i più interessanti per l'originalità dell'approccio: invece di dimostrare direttamente il postulato, egli cercò di stabilire – ragionando *per assurdo* – l'incoerenza delle teorie che si ottengono supponendo che esso non valga. Esaminò così due ipotesi "assurde" che di fatto anticiparono le ottocentesche geometrie non-euclidee, iperbolica ed ellittica. Nel trattato *Euclide emendato da ogni neo* (1733) Saccheri costruisce una singolare figura geometrica, il *quadrilatero birettangolo isoscele*, erigendo, sugli estremi di un segmento e perpendicolari ad esso, due segmenti della stessa lunghezza e chiudendo il quadrilatero con un quarto. Gli angoli che si formano agli estremi del quarto lato hanno necessariamente la stessa ampiezza e quindi possono essere acuti, retti (come nella geometria euclidea, nella quale il quadrilatero non è altro che un rettangolo) oppure ottusi. Dopo aver confutato la terza possibilità, dimostrando che *l'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa perché distrugge se stessa* – cioè che essa genera una contraddizione –, contro l'*inimica hypothesis anguli acuti* combattè invece un'accanita battaglia deducendo "strani" risultati sul comportamento delle *rette indefinitamente prolungabili*, fino ad affermare che *L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta*, fermamente convinto che la mera enunciazione potesse confutare anche quella possibilità, nonché di aver finalmente lavato la colpa di Euclide. In realtà i bizzarri risultati delle notti insonni dello strenuo difensore dell'assoluta verità della geometria euclidea non erano affatto contraddizioni, ma i primi teoremi, affatto ripugnanti, della futura geometria iperbolica.

Con la scoperta delle geometrie non-euclidee, oltre a quella iperbolica venne identificata la geometria ellittica – nella quale trova spazio l'ipotesi dell'angolo ottuso – che è una discendente della geometria sferica studiata già dagli antichi Greci, e la caduta del pregiudizio sulla dimostrabilità del postulato di Euclide si stabilì un nuovo pregiudizio circa la sua validità nelle geometrie ellittica e sferica: proprio qui si conclude l'antefatto ed inizia la nostra storia.

CACCIA AL TESORO

Il gioco degli scacchi è una lingua internazionale.
Edward Lasker

Una partita a scacchi è un'opera d'arte fra due menti, che deve bilanciare due scopi talvolta disparati: vincere e produrre bellezza.
Vasilij Vasil'evič Smyslov

Il circolo di idee presentate in questa opera nasce da un'analisi approfondita dell'approccio teorico, di fatto ormai standardizzato, allo studio della geometria di Euclide e delle tre geometrie non-euclidee. Il nucleo attorno al quale ruota l'intero discorso è il celeberrimo Quinto Postulato euclideo il quale, come abbiamo visto, a causa della sua complessità, ha coinvolto i matematici – nell'arco di ben due millenni – in un'affannosa ricerca di una sua dimostrazione, condotta per mezzo di riformulazioni spesso fuorvianti. L'enunciato originale del Postulato si è rivelato invece pilastro della nuova *geometria preassoluta,* che viene esposta in questo libro: i due autori, generalizzando la geometria del matematico di Alessandria, hanno portato alla luce le radici concettuali condivise da tutte e quattro le diverse geometrie e ricomposto così la smarrita unità della Geometria. Un'attenta rilettura del primo libro degli *Elementi* di Euclide, l'opera scientifica più tradotta, pubblicata e studiata al mondo, ha ispirato un approccio assiomatico strettamente aderente alla visione speculativa della *geometria assoluta* dello stesso Euclide, fruibile da un'ampia platea di lettori, composta da semplici curiosi, da interessati, da appassionati, da studenti, da docenti, nonché da matematici professionisti e anche, perché no, da cultori della filosofia antica.

Manifesto

Chi si avvicina per la prima volta allo studio della geometria – magari con l'intenzione di capire meglio la struttura dell'universo in cui vive – rischia di perdersi, di non trovare più il bandolo della matassa, non appena scopre che non ne esiste una sola. Qual è quella vera? Ce n'è una vera? E le altre, allora? Approfondendo il discorso e mettendo assieme i pezzi del puzzle si scopre come, nonostante siano diverse, queste geometrie rivali sembrino condividere svariate proprietà: sorge spontaneo il sospetto che si tratti semplicemente di emanazioni contrapposte di una categoria più profonda ancora da svelare, come le cinque dita che affiorano dall'acqua possono apparire semplici compagni di viaggio, agli occhi di un osservatore ignaro dell'anatomia umana, finché non si intravede anche il resto della mano, che le relega a mere propaggini di un membro più complesso. Per poter dare un fondamento certo alla discussione sui numerosi punti di contatto e di discordanza è necessario disporre di una solida teoria. Non è forse vero che una delle finalità principali della matematica è produrre esclusivamente affermazioni dimostrate con "rigore matematico"? Questa idea, certamente popolare tra i non addetti, tanto da risultare una delle più radicate leggende sulla matematica, esprime una visione troppo estremista della Regina delle Scienze, perché in realtà i suoi cultori, correndo l'audace rischio di sbagliare, non disdegnano di formulare congetture[1] prive di dimostrazione.

[1] Per citarne una, ricordiamo la famosa congettura di Goldbach, formulata nel 1742 in una lettera a Eulero, la quale afferma che ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi. Prescindendo dagli innumerevoli tentativi falliti di dimostrazione, dal punto di vista teorico i risultati fino ad ora ottenuti sono i seguenti (cfr. Nathanson, 1996): nel 1930 Shnirel'man dimostrò che ogni numero intero maggiore di 1 si può scrivere come somma di una quantità limitata di numeri primi; Ramaré nel 1995 dimostrò che ogni numero pari è la somma di al più sei numeri primi; nel 1937 Vinogradov dimostrò che ogni numero dispari sufficientemente grande (cioè maggiore di un certo numero fissato *n*) è esprimibile come somma di tre numeri

Un altro motivo che ci ha indotti a dare alla luce quest'opera va ricercato nell'originalità del lavoro in esso contenuto. Sebbene l'idea dell'unificazione delle teorie geometriche non sia una novità, a quanto ci risulta le uniche fonti in letteratura in cui le geometrie non-euclidee sono state unificate a quella di Euclide in un sistema assiomatico, per esempio (Bachmann, 1973) o (Kay, 2011), utilizzano una trattazione che non è pura dal punto di vista matematico: nel primo caso si mescolano l'approccio strettamente *sintetico* (caratterizzato cioè da un sistema di assiomi riguardanti enti puramente geometrici, come i punti, le rette…) con quello della teoria dei gruppi derivato dal *Programma di Erlangen*, il programma di ricerca illustrato nel 1872 da Felix Klein: in questo contesto la geometria viene caratterizzata a partire da un insieme opportuno (*gruppo*, in gergo tecnico) di trasformazioni (per esempio rotazioni, traslazioni…) che agiscono su un insieme i cui elementi sono i punti; ogni figura è un sottoinsieme di punti e le proprietà geometriche delle figure sono *invarianti* rispetto a (cioè non vengono modificate da) tutte le trasformazioni del gruppo considerato. Il secondo tipo di approccio usa invece il formalismo analitico dei numeri reali. La "pecca" più appariscente di questi approcci, però, è che l'unificazione proposta coinvolge *soltanto* una delle due geometrie ellittiche, nel primo caso quella singolarmente ellittica o, per semplicità, ellittica senza specificazioni – i cui punti vengono detti *singoli*, perché due qualsiasi di essi sono attraversati da una sola retta –, mentre nel secondo caso quella doppiamente ellittica o sferica – i cui punti vengono detti *doppi*, perché a coppie sono attraversati da (almeno) due rette, e l'autore stesso di (Kay, 2011) in una nota (p. 216) ritiene interessante ed auspica una trattazione assiomatica pura, in cui tutte le geometrie elementari (euclidea, iperbolica, ellittica e sferica) siano riunite: proprio il risultato che illustriamo in questo volume! Altri[2] hanno invece affermato l'esistenza di una geometria che possiede le caratteristiche comuni alle geometrie elementari, senza però darne una dimostrazione. Ci siamo pertanto sentiti incoraggiati a condividere il frutto del nostro lavoro con la platea più ampia possibile.
A questo punto, però, si è posto un problema che pareva insuperabile: come si può conciliare la vocazione divulgativa dell'opera con l'esigenza di presentare i teoremi completi di dimostrazione? Fortunatamente, a togliere le castagne dal fuoco è sopraggiunta una nostra passione comune: il gioco degli scacchi. Ci siamo rammentati del libro *60 partite da ricordare* (Fischer, 1972), in cui il campione del mondo Bobby Fischer accompagna, mossa dopo mossa, lo scacchista non esperto nell'analisi delle sue partite: la soluzione si è così immediatamente materializzata dinanzi a noi.
Un altro falso mito vuole i matematici dotati di una specie di facoltà divinatoria che permette loro di scoprire la dimostrazione di un teorema o, addirittura, di inventare su due piedi una nuova teoria, sebbene allo stesso tempo questa genialità riconosciuta loro venga spesso assimilata a quella degli *idiot savants* (fors'anche a giustificazione di una preconcetta superiorità della cultura umanistica nei confronti di quella scientifica…). La sfida che abbiamo voluto raccogliere è stata allora quella di sfatare questa visione distorta, commentando in modo comprensibile *tutti* i passaggi che ci hanno condotti all'elaborazione del sistema assiomatico Γ (*leggi* gamma), discutendo – alla Fischer – *tutte* le varianti di gioco,

---

primi, quindi, se in queste somme un addendo fosse uguale a 3, potremmo concludere che tutti i numeri pari sufficientemente grandi sono la somma di due primi; nel 1937 e nel 1938 van der Corput, Chudakov ed Estermann osservarono, indipendentemente l'uno dall'altro, come il risultato di Vinogradov implichi che quasi tutti i numeri pari siano la somma di due numeri primi, ma comunque potrebbero essere infiniti quelli che non posseggono tale proprietà; nel 1966 Chen annunciò il suo teorema secondo cui ogni numero pari sufficientemente grande è la somma di due numeri primi, o tra un numero primo e un altro numero che è il prodotto di due primi, ma la dimostrazione venne pubblicata solo nel 1973 a causa di difficoltà legate alla Rivoluzione Culturale cinese. La congettura, infine, è stata verificata dal ricercatore portoghese Tomás Oliveira e Silva (http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html) mediante un sistema di calcolo distribuito (un *software* che funziona su una rete di computer) fino al numero 4000000000000000000, raggiunto il 4 aprile 2012, ma il suo programma di ricerca continua…

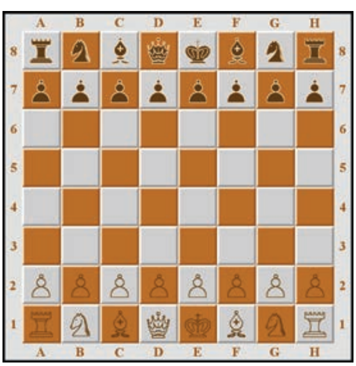
[2] Per esempio (Odifreddi, 2011).

proprio come se l'indagine condotta in quest'opera fosse una partita a scacchi. Ecco spiegata l'origine dell'inusuale struttura del libro, suddiviso in *fasi di gioco* anziché in capitoli.
Il nostro intento dichiarato è dunque quello di mostrare come l'attività di un matematico non abbia nulla di trascendentale, risultando, invece, frutto di duro lavoro, costellata com'è di incognite e trabocchetti, il cui successo – quando arriva e ciò non sempre accade – si fonda sulla perseveranza, sulla collaborazione degli studiosi e sulla conoscenza di ciò che già è stato sviluppato da altri, come per qualunque mestiere. L'esposizione di Γ, il sistema di assiomi della nuova geometria preassoluta, allora, non è altro che un pretesto per parlare (anche) di altro e coinvolgere, ad un livello superiore di lettura, il lettore che, avvertito, saprà fare attenzione, oltre che all'aspetto puramente tecnico, al racconto dal vivo degli sforzi tesi a risolvere il problema contingente della definizione di Γ e a trasporlo nell'ambito più generale dell'intera attività di ricerca. È nostra convinzione che questa scelta potrà avvicinare alla matematica più di un lettore pregiudizialmente scettico o semplicemente timoroso di "non essere all'altezza". Ad ogni modo, per ragioni di completezza, sono state riportate, in riquadri a sfondo grigio, tutte le dimostrazioni: queste possono essere tralasciate in una prima lettura, dove è più importante sapersi orientare e capire il senso generale del discorso, e sono riservate principalmente ai soli lettori che possiedono una certa esperienza matematica. Ciò nonostante, incoraggiamo i curiosi a darci pure un'occhiata, perché in fondo non è richiesta alcuna conoscenza propedeutica se non una certa dimestichezza con il ragionamento logico.

La matematica e gli scacchi

L'idea di associare la matematica agli scacchi non è certamente nuova: per esempio il matematico inglese G. H. Hardy, uno dei più insigni del Novecento, nella sua *Apologia di un matematico* (Hardy, 2002), paragona la dimostrazione per assurdo ad un *gambetto*, un particolare tipo di apertura della partita in cui si sacrifica un pedone per guadagnare spazio e tempo nello sviluppo dei pezzi. Ma l'analogia è ben più profonda e si sviluppa su più livelli, come ora spiegheremo brevemente per esplicitare meglio il contesto in cui presentiamo il materiale.

Al livello più basso, quello formale, il gioco degli scacchi può essere assimilato ad un sistema assiomatico: una teoria matematica si sviluppa a partire da alcuni concetti primitivi, quali i punti e le rette in geometria, non definiti – perché non è possibile definire ogni termine, dato che, così facendo, si incorrerebbe in un regresso infinito – e da alcune relazioni tra loro affermate mediante gli assiomi, asserzioni ritenute vere senza dimostrazione – per evitare, anche in questo caso, un potenziale regresso infinito. A partire da questi dati iniziali la teoria si sviluppa per mezzo di teoremi ottenuti mediante applicazione di precise ed esplicite regole di deduzione. Negli scacchi questa descrizione si può tradurre nel seguente modo: i concetti primitivi corrispondono



Posizione iniziale dei pezzi

- alla scacchiera (formata da 64 caselle di colore alternato bianco e nero – le cui righe si indicano con un numero da 1 a 8 e le colonne con una lettera da *a* ad *h* – e avente la casella bianca della prima *traversa*, cioè riga, a destra) e
- ai pezzi (cioè i pedoni, i Cavalli, gli Alfieri, le Torri, le Donne e i Re),

mentre l'unica relazione è il colore (bianco o nero) che permette di stabilire quali sono i pezzi di ciascun giocatore. L'unico assioma è dato dalla posizione iniziale dei pezzi sulla scacchiera, mentre le regole di deduzione sono le (precise) regole di movimento dei pezzi e i teoremi sono tutte le posizioni *legali*, ottenute cioè soltanto mediante mosse regolamentari: ad esempio la posizione dello scacco *matto dell'imbecille* (il Bianco prende matto in due sole mosse!) è un teorema, mentre una posizione del Re al di là dei propri pedoni non mossi è *illegale* e pertanto non è un teorema, perché non "deducibile" dalla posizione iniziale. Ovviamente sono regole di deduzione anche le altre regole del gioco cioè, per esempio, in quali casi è possibile effettuare la presa di un pedone *en passant*, in quali si può arroccare, l'obbligo di muovere i pezzi (uno alla volta) a turno a cominciare dal Bianco, il divieto di catturare il Re avversario o di mettere in presa il proprio Re, ecc. Il logico e appassionato scacchista Raymond Smullyan in *The chess mysteries of Sherlock Holmes* (*Gli enigmi scacchistici di Sherlock Holmes*) propone divertenti e paradossali problemi di "analisi retrogada", in cui si deve scoprire l'ultima mossa eseguita a partire da una posizione legale, dimostrando così che la posizione proposta è un teorema.

Ad un livello superiore l'analogia tra matematica e gioco degli scacchi si consuma nel paragone tra l'attività di definizione / analisi / sviluppo / applicazione di una teoria o, nel caso più semplice, di ideazione della dimostrazione di un teorema, e lo svolgimento della partita: in entrambi i casi si possono distinguere diverse fasi dai contorni sfumati (nel senso che non è definibile con precisione quando termina una e comincia la seguente), ciascuna tesa a preparare l'avvento delle successive; negli scacchi queste fasi prendono il nome di *apertura*, *mediogioco* e *finale*. Siccome se ne parlerà nel seguito del libro, discutendo l'esempio paradigmatico che ci interessa, per ora non aggiungiamo altro in merito.

Infine, ad un livello ancora superiore, l'analogia verte sulla comparazione tra lo stile del giocatore (chi ama il gioco aggressivo e chi procede con maggior pacatezza, evitando varianti rischiose ed azzardate) e quello del matematico (chi osa imboccare strade nuove, azzardando congetture ardite, e chi preferisce percorrere soltanto strade note e applicare metodologie già collaudate).

La partita

Presentiamo finalmente la partita che verrà disputata. Va da sé che il Bianco è la "matematica ufficiale" che ha già giocato la sua prima mossa e quindi a noi spetta il Nero: naturalmente, per (sperare di) intraprendere una strategia vincente, prima di eseguire la prima contromossa, dovremo analizzare accuratamente le caratteristiche e i punti deboli della posizione dell'avversario. Dopo la scoperta della geometria iperbolica da parte di Gauss, Lobačevskij, Bolyai e della geometria ellittica da parte di Riemann, dopo la costruzione di quei modelli che hanno dato loro credibilità in seno alla comunità matematica, ancora scettica ed ancorata alla vecchia idea che la geometria debba descrivere la struttura *reale* dello spazio in cui viviamo, dopo le diverse sistemazioni assiomatiche della geometria euclidea di Hilbert, da un lato, e della geometria ellittica, dall'altro, pareva che l'argomento delle geometrie *sintetiche*, cioè di tipo euclideo-hilbertiano, fosse ormai definitivamente chiuso e lasciato alla storia della matematica per la sua valenza didattica, sorpassato com'è dagli altri tipi di geometrie ora di moda (geometria analitica, geometria differenziale, geometria algebrica, topologia, geometria frattale, geometria fuzzy, geometria non commutativa). In realtà, restano ancora aperte alcune questioni rilevanti, in particolare

- la confusione relativa al Quinto Postulato[3] di Euclide e alla sua negazione, dovuta essenzialmente alla sostituzione del postulato con altri "equivalenti" ad esso, e la

[3] Per denotare il Quinto Postulato *non* adotteremo l'espressione – molto diffusa in letteratura – di "postulato delle parallele", innanzitutto perché Euclide, nel suo celebre postulato, non parla affatto di rette parallele e, in secondo luogo, per evitare confusioni con l'espressione ASSIOMA DELLE PARALLELE (*Per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola parallela ad essa*) riportata nelle prime tre edizioni dei *Fondamenti della*